Рассмотрим задачу 4 первого тура регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников 2008/2009 года по информатике.

Задача 4. Треугольники

Имя входного файла:	triangle.in
Имя выходного файла:	triangle.out
Максимальное время работы на одном тесте:	3 секунды
Максимальный объем используемой памяти:	64 мегабайта

Роман достаточно давно занимается в математическом кружке, поэтому он уже успел узнать не только правила выполнения простейших операций, но и о таком достаточно сложном понятии как симметрия. Для того чтобы получше изучить симметрию, Роман решил начать с наиболее простых геометрических фигур – треугольников. Он скоро понял, что осевой симметрией обладают так называемые равнобедренные треугольники. Напомним, что треугольник называется *равнобедренным*, если его площадь положительна, и у него есть хотя бы две равные стороны.

Недавно Роман, зайдя в класс, увидел, что на доске нарисовано n точек. Разумеется, он сразу задумался, сколько существует троек из этих точек, которые являются вершинами равнобедренных треугольников.

Требуется написать программу, решающую указанную задачу.

Формат входных данных

Входной файл содержит в первой строке целое число n ($3 \le n \le 1500$). Каждая из последующих строк содержит по два разделенных пробелом целых числа – x_i и y_i , определяющих координаты i-ой точки. Все координаты точек не превосходят 10^9 по абсолютной величине. Среди заданных точек нет совпадающих.

Формат выходных данных

В выходной файл необходимо вывести ответ на вышеназванную задачу.

Пример входных и выходных данных

triangle.in	triangle.out
3 0 0 2 2 -2 2	1
4 0 0 1 1 1 0 0 1	4

Заметим сразу, что полный перебор всех точек приводит к очень медленному решению. Первую точку можно выбрать n способами, вторую — n-1 способом, третью n-2 способами. Всего $n(n-1)(n-2)$вариантов. Даже если учесть, что обмен местами второй и третьей точек нового треугольника не дают, время работы программы, построенной по такому алгоритму, будет порядка n^3. Это не позволит при больших n уложиться в отведённые 3 секунды. Поэтому будем применять другой алгоритм, рекомендованный авторами задачи в «Кратких методических рекомендациях по решению задач» (См. [1])

Перед описанием самого алгоритма обратим внимание на следующую теорему.

Теорема 1. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат с равными масштабами по обеим осям. Тогда не существует ни одного равностороннего треугольника с целочисленными координатами всех его вершин.
Доказательства этой теоремы см. в [2].

Идея алгоритма

Чтобы получить ответ на вопрос задачи, достаточно для каждой из точек подсчитать количество равнобедренных треугольников с вершиной, противолежащей основанию, в этой точке, а потом полученные результаты сложить. В силу теоремы 1 при этом ни один из треугольников не будет учтён трижды.

Подсчёт количества равнобедренных треугольников с вершиной в заданной точке

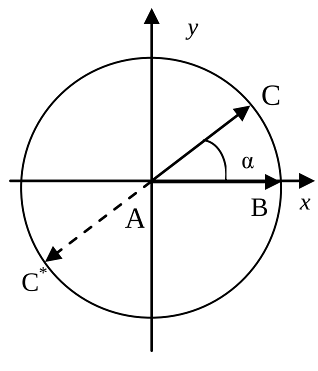
Пусть найдены q точек, находящихся на фиксированном расстоянии d от заданной точки А. Заметим, что все они лежат на окружности радиуса q с центром в точке А. Число способов выбрать по 2 точки, дополнительно к точке А для построения треугольника равно $\frac{q(q-1)}{2}$, т.к. первую точку можно выбрать q способами, а вторую q-1 способом. При этом порядок выбора точек значения не имеет. Однако некоторые из построенных таким способом треугольников могут оказаться вырожденными. Их вершины окажутся принадлежащими одной прямой. Это будет в том случае, если выбранная пара точек центрально-симметрична относительно точки А. Обозначим количество вырожденных треугольников через s. Тогда число равнобедренных треугольников с вершиной в точке А и боковой стороной d равно

$$K_d = \frac{q(q-1)}{2} - s$$

Чтобы найти полное количество равнобедренных треугольников с вершиной в точке А, надо просуммировать это выражение по всем возможным d.

Нахождение вырожденных треугольников

Чтобы найти центрально-симметричные относительно А точки C_i окружности, рассмотрим углы наклона α_i векторов $\overrightarrow{AC_i}$ к оси x. Центрально-симметричными будут те точки C_i и C_j, для которых $|\alpha_i - \alpha_j| = \pi$ (см. точки C и C* на рис.). Однако вычисления углов лучше избежать, т.к. это связано с использованием тригонометрических функций, а значит и вещественных типов данных с неизбежной потерей точности вычислений.



Введём вектор $\overrightarrow{AB}$ длины d, направленный по оси x. Тогда вместо наклона $\overrightarrow{AC_i}$ к оси x можно вычислять его наклон к вектору $\overrightarrow{AB}$. По определению векторного произведения $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_i}| = AB \cdot AC \cdot \sin\alpha_i$, откуда

$$\sin \propto_i = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_i}|}{AB \cdot AC_i}$$

Проекция векторного произведения на ось z может быть вычислена через координаты векторов

$$\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC_i}\right)_z = AB_x \cdot AC_{iy} - AB_y \cdot AC_{ix}$$

Отсюда получаем формулу (1)

$$\sin \propto_i = \frac{AB_x \cdot AC_{iy} - AB_y \cdot AC_{ix}}{AB \cdot AC_i}$$

При этом для точек C, лежащих выше точки A (см. рис.), $\sin \alpha_i$ будет положительным, а ниже оси — отрицательным. По значению синуса его аргумент определён неоднозначно. Для установления вырожденности треугольника диаметрально противоположные относительно A точки C и C* можно считать двумя совпадающими, потому что прямые (AC) и (AC*) совпадают. Поэтому если $AC_{ix} < 0$, развернём $\overrightarrow{AC_i}$ в противоположную сторону, изменив знаки у его обеих координат. Вектор, направленный вниз, также развернём, направив его вверх. Рассмотрение сведётся к первой и четвёртой координатным четвертям, где функция $y = \sin x$ является возрастающей, и, следовательно, обратная функция определена и тоже возрастает.

Если отсортировать все $\sin \alpha_i$, например, по возрастанию, то значения для симметричных относительно точки A точек окажутся рядом. Чтобы найти количество вырожденных треугольников, достаточно будет один раз пройти по отсортированному массиву и подсчитать количество s рядом расположенных пар совпадающих значений.

Знаменатель формулы (1) вычислять не нужно, потому что он одинаков для всех C_i. Задача сведётся к сортировке и просмотру целочисленного массива.

Вычисление q

Следует сформировать массив расстояний от точки номер i до всех остальных. Отсортировать его, например, по возрастанию. Одинаковые расстояния окажутся рядом. За один проход по массиву определяем и q для различных расстояний d, и соответствующие K_d.

Чтобы избежать работы с вещественными числами и потери времени на вычисление квадратных корней, лучше вместо массива расстояний использовать массив квадратов расстояний.

О реализации

В папке triangle2009 находится реализация описанного алгоритма на Microsoft Visual C++ 2005. Для сортировки используется метод быстрой сортировки QuickSort. Функция сортировки реализована в виде шаблона, т.к. её приходится вызывать для сортировки элементов разных типов данных. Исполняемый файл находится в triangle2009\release. Время работы этой программы на моём компьютере менее 1 секунды на любом тесте. Набор тестов смотрите в [1]. При замене метода сортировки на квадратичный (прямую вставку) время работы заметно больше, но в отведённые 3 с укладывается. Полный перебор всех точек на том же компьютере осуществляется за время около 25 с.

Литература

1. Методические рекомендации и задачи регионального этапа. http://info.rusolymp.ru/images/informatics/methodics_informatics_3stage_2009.zip
2. В. Вавилов, А. Устинов. Полуправильные многоугольники на решётках. //Журнал «Квант», №6, 2007 год.