

Занятие 20. Векторы

Понятие вектора. Элементарные операции над векторами

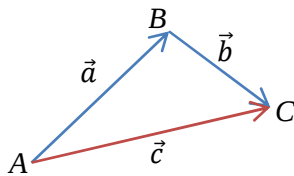
Вспомним некоторые сведения о векторах. Почти всё это должно было изучаться вами на уроках математики.

Определение 1. Вектором называется направленный отрезок.

Вектор однозначно определяется заданием его длины и направления. Вектор, направленный из точки A в точку B , обозначают $\overrightarrow{AB}$. Длину этого вектора будем обозначать AB . Часто вектор обозначают одной строчной буквой, например $\vec{a}$. Тогда длину вектора будем обозначать просто a . Начало вектора называют точкой его приложения.

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают. Нулевой вектор $\vec{0}$ не имеет определённого направления и имеет длину, равную нулю.

Определение 2. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

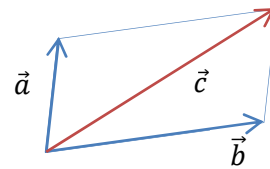


Рисунок 1. Сложение векторов (правила треугольника и параллелограмма)

На рисунке 1 слева показано правило сложения векторов (правило треугольника), соответствующее определению 2:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

На том же рисунке справа показано ещё одно правило сложения векторов — правило параллелограмма.

Определение 3. Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор, длина которого равна $|k|a$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $a > 0$ и противоположно ему при $a < 0$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$, т.е. как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора, равного по длине и противоположного по направлению вектору $\vec{b}$.

Сумма, разность векторов и произведение вектора на число подчиняются законам, аналогичным законам для вещественных чисел. Например,

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b}\end{aligned}$$

Проекции вектора на оси координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Пусть точка A имеет в этой системе координат координаты (x_A, y_A) , а точка B — координаты (x_B, y_B) . Тогда проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат будут равны

$$AB_x = x_B - x_A$$

$$AB_y = y_B - y_A$$

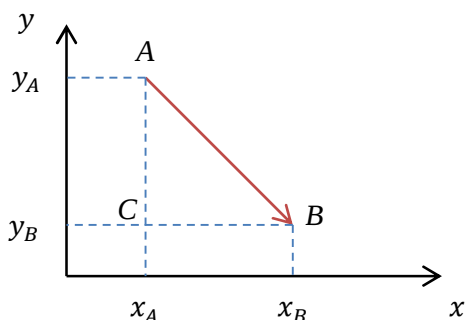


Рисунок 2

Проекция вектора на оси координат — это числа. Направления они не имеют, но могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. В примере на рисунке 2 проекции $AB_x > 0$, $AB_y < 0$. Вектор, перпендикулярный оси, имеет нулевую проекцию на эту ось.

По теореме Пифагора найдём связь проекций вектора на оси координат и его длины (см. рис. 2).

$$AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{AB_x^2 + AB_y^2}$$

Формулы, справедливые для векторов, верны и для их проекций на соответствующие оси координат. Например,

- если $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $c_x = a_x + b_x$ и $c_y = a_y + b_y$,
- если $\vec{c} = k\vec{a}$, то $c_x = ka_x$ и $c_y = ka_y$.

Скалярное произведение векторов

Определение 4. Скалярным произведением векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

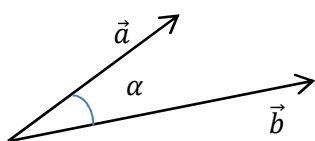


Рисунок 3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

Через проекции векторов скалярное произведение выражается следующей формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$$

Обратите внимание, что скалярное произведение векторов есть число, скаляр. Направления оно не имеет.

Как следует из определения 4, скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного вектора на проекцию другого вектора на направление первого (см. рис. 4)¹. Если векторы взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

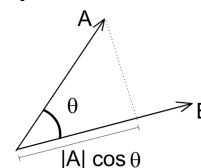


Рисунок 4

¹ На рис. 4 через $|A|$ обозначена длина (модуль) вектора $\vec{A}$

Для скалярного произведения векторов справедлив коммутативный (переместительный) закон:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Векторное произведение векторов

Это в школе не изучается, поэтому о векторном произведении векторов подробнее.

Определение 5. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, длина которого равна $c = a \cdot b \cdot \sin \theta$, а направление перпендикулярно к $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и определяется по правилу буравчика (правого винта). (Здесь θ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.)

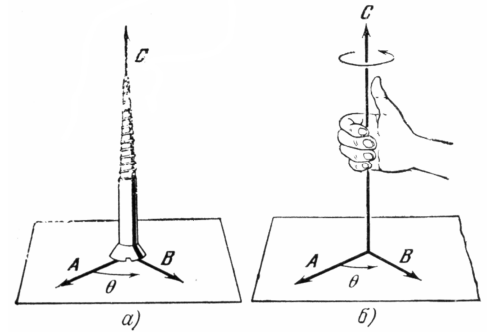


Рисунок 5. Векторное произведение

Векторное произведение обозначают $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Чтобы определить направление векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$, надо совместить точки приложения векторов, а потом вращать буравчик (правый винт) в ту сторону, в которую следует поворачивать по кратчайшему пути вектор $\vec{a}$, чтобы совместить его направление с направлением вектора $\vec{b}$. (См. рис. 5 (а).) Тогда направление поступательного движения буравчика укажет направление векторного произведения $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Вместо правила буравчика можно применять правило *правой руки*. Его смысл ясен из рис. 5 (б).

Из сказанного выше ясно, что векторное произведение векторов не подчиняется коммутативному (перестановочному) закону. Оно антикоммутативно

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Направление векторного произведения зависит от порядка сомножителей.

Векторное произведение параллельных векторов, как следует из определения 5, равно нулю. Действительно, в этом случае $\theta = 0$ для сонаправленных или $\theta = \pi$, т.е. 180° , для противоположно направленных векторов, а значит $\sin \theta = 0$.

Не подчиняется векторное произведение и ассоциативному (сочетательному) закону

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Векторное произведение и площадь параллелограмма

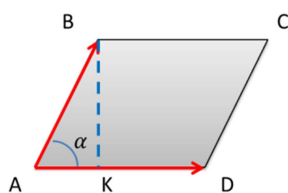


Рисунок 6

Модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма или удвоенной площади треугольника, который может быть построен на этих векторах.

$$BK = AB \cdot \sin \alpha$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot BK = AD \cdot AB \cdot \sin \alpha$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

Проекция векторного произведения

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат (x, y, z) в пространстве. Она называется правовинтовой, если направление оси z относительно осей x и y определяется правилом правого

винта. А именно, поворачивая ось x до совмещения с осью y , по правилу буравчика мы будем получать направление оси z . Иными словами, если обозначить единичный вектор, направленный по оси x , через $\vec{i}$, единичный вектор вдоль оси y через $\vec{j}$, а единичный вектор вдоль оси z через $\vec{k}$, то в правовинтовой системе координат $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$.

Например, если на рис. 5 ось x направить по вектору $\vec{a}$, ось y по вектору $\vec{b}$, а ось z по вектору $\vec{c}$, то получится правовинтовая система координат. Если начертить на листе бумаги ось x вправо, ось y вверх, то в правовинтовой системе координат ось z будет направлена к нам.

Везде в дальнейшем мы будем использовать только правовинтовые системы координат.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в координатной плоскости (x, y) . Тогда проекция на ось z их векторного произведения $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ равна

$$c_z = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$$

Проекции вектора $\vec{c}$ на другие оси координат равны нулю.

Задача 1

На плоскости заданы своими координатами точки A , B и C . Определить положение точки C относительно прямой AB : лежит ли точка C выше прямой, ниже прямой или на прямой. Все координаты — целые числа, по модулю не превосходящие 10^5 . Ось x направлена вправо, ось y — вверх.

Решение

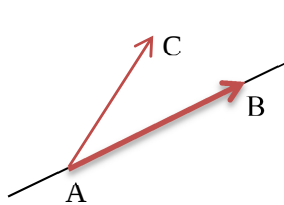


Рисунок 7

Рассмотрим векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$. По их векторному произведению можно судить о положении точки C относительно прямой AB .

Вычислим $\vec{p} = \vec{AB} \times \vec{AC}$. Этот вектор перпендикулярен плоскости чертежа.

- Если вектор $\vec{p}$ направлен к нам, то точка C лежит выше прямой AB . Этот случай показан на рисунке 7. При указанном в условии задачи выборе осей координат $p_z > 0$.
- Если вектор $\vec{p}$ направлен от нас, то точка C лежит ниже прямой AB . В этом случае $p_z < 0$.
- $\vec{p} = \vec{0}$ свидетельствует о том, что точки A , B и C лежат на одной прямой.

Для хранения координат точек и проекций векторов на оси координат будем использовать записи

```

Type TPoint = record
    x, y : Integer
end;

TVector = TPoint;
```

Тип `TVector` введён для удобочитаемости программы. Можно было обойтись одним только типом `TPoint`.

```

{$mode delphi}
Program Task1;
Type TPoint = record
    x, y : Integer
end;
TVector = TPoint;
```

```
//Вычисляем проекцию векторного произведения a x b на ось z
```

```

Function CrossProduct(const a,b : TVector) : Int64;
Begin
    Result := Int64(a.x) * b.y - Int64(a.y) * b.x
End;

//Вычисление проекций вектора AB по координатам его концов
Procedure MakeVector(const A,B : TPoint; out AB : TVector);
Begin
    AB.x := B.x - A.x;
    AB.y := B.y - A.y
End;

Var A, B, C : TPoint;
    AB, AC : TVector;
    pz      : Int64;
Begin
    WriteLn('Задайте координаты точек A, B, C:');
    WriteLn('xa ya xb yb xc yc');
    Read(A.x,A.y,B.x,B.y,C.x,C.y);
    MakeVector(A,B,AB);
    MakeVector(A,C,AC);
    pz:=CrossProduct(AB,AC);
    If pz > 0 Then
        WriteLn('Точка C выше прямой AB')
    Else If pz < 0 Then
        WriteLn('Точка C ниже прямой AB')
    Else WriteLn('Точки A, B и C лежат на одной прямой')
End.

```

Функция CrossProduct, вычисляющая проекцию векторного произведения на ось z, имеет тип int64, т.к. перемножив две величины, ограниченные значением 10^5 можно получить результат до 10^{10} .

Задача 2

На плоскости заданы целочисленные координаты точек A, B, C, D. Пересекает ли прямая AB отрезок CD?

Формат входных данных

Входной файл *input.txt* содержит 4 строки, в каждой из которых содержится по 2 разделённых одним пробелом целых числа: координаты x и y одной из точек. В первой строке — координаты точки A, во второй — точки B, в третьей — точки C, в четвёртой — точки D. Все числа по модулю не превышают 10^9 .

Формат выходных данных

В файл *output.txt* выведите ответ на вопрос задачи: **Yes**, если пересекает, и **No** в противном случае.

Решение

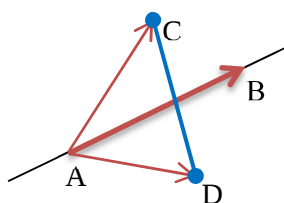


Рисунок 8

Прямая AB пересечёт отрезок в том и только том случае, если точки C и D окажутся по разные стороны от неё или хотя бы одна из этих точек окажется на прямой AB. При этом не важно, какая именно точка: C или D — окажется не выше прямой, а какая не ниже. Один из возможных случаев представлен на рисунке 8.

Пусть $\vec{p} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, $\vec{q} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$. Тогда или хотя бы один из этих векторов нулевой, или они направлены в противоположные стороны.

Переходя к проекциям, можно записать $p_z \cdot q_z \leq 0$.

При этом даже не важно, как именно направлены оси координат x и y , так как, в отличие от задачи 1, знаки проекций нам знать не обязательно. Достаточно того, что они не совпадают.

Довести решение задачи до конца вы, надеюсь, сможете сами.

Задача 3

На плоскости заданы точки A, B, C, D своими целочисленными координатами. Пересекаются ли отрезки AB и CD ? Форматы входных и выходных данных такие же, как в задаче 2.

Решение

Чтобы пересекались отрезки, необходимо, чтобы прямая AB пересекала отрезок CD , а прямая CD пересекала отрезок AB . Но этого не достаточно.

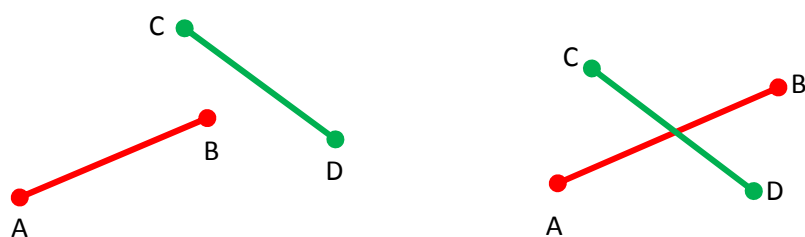


Рисунок 9

Если два отрезка лежат на одной прямой, то названные условия выполнены, но отрезки могут как пересекаться, так и нет.

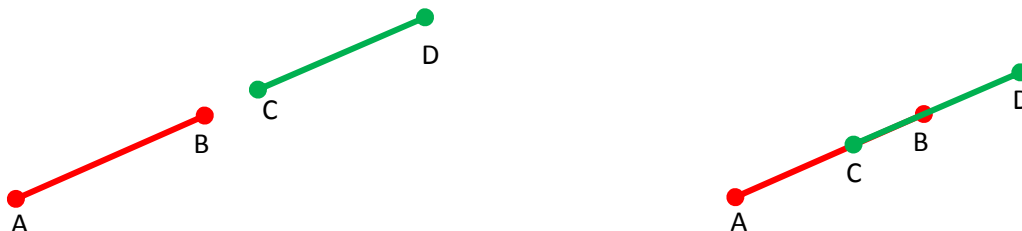


Рисунок 10

Чтобы исследовать этот случай введём понятие ограничивающего многоугольника. Ограничивающим прямоугольником для некоторого отрезка MN назовём такой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, что MN является его диагональю.

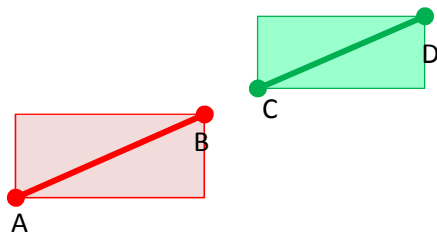


Рисунок 11

Поскольку отрезок является подмножеством ограничивающего его прямоугольника, то если ограничивающие прямоугольники двух отрезков не пересекаются, то не пересекаются и сами отрезки (см. рис. 11).

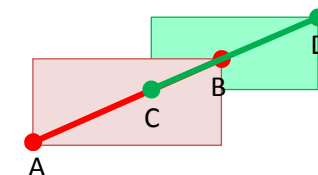


Рисунок 12

Может возникнуть вопрос о необходимости проверок пересечения прямой AB отрезка CD и прямой CD отрезка AB . Не достаточно ли просто проверить пересечение ограничивающих

многоугольников отрезков АВ и CD? Если ограничивающие многоугольники не пересекаются, то действительно больше ничего проверять не надо: пересечения отрезков нет, ведь они подмножества своих многоугольников. Но вот пересечение ограничивающих многоугольников ещё не гарантирует пересечения отрезков. Соответствующий пример см. на рис. 13.

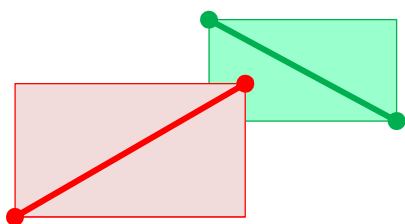


Рисунок 13

Итак, получаем следующий алгоритм проверки пересечения отрезков.

1. Проверить пересечение ограничивающих многоугольников. Если они не пересекаются, то не пересекаются и отрезки, иначе переходим к п. 2.

2. Проверить, пересекает ли прямая АВ отрезок CD и прямая CD отрезок АВ. Ответ на этот вопрос и даёт ответ на вопрос задачи.

Проверка пересечения ограничивающих прямоугольников

Находим левый нижний и правый верхний угол каждого прямоугольника. Их координаты (x_{min}, y_{min}) и (x_{max}, y_{max}) соответственно.

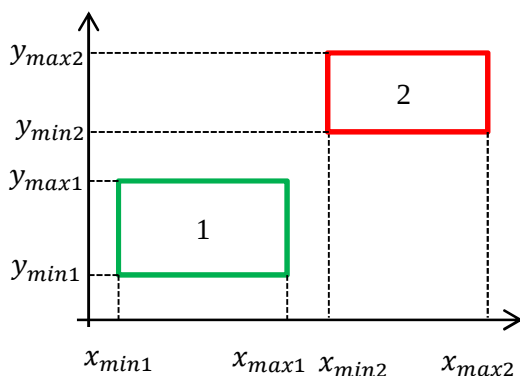


Рисунок 14

Прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, не пересекаются, если истинно хотя бы одно из следующих логических выражений.

1. Второй прямоугольник правее первого (в том смысле, что любая точка второго прямоугольника правее любой точки первого) (см. рис. 14): $x_{min2} > x_{max1}$

2. Второй прямоугольник левее первого: $x_{max2} < x_{min1}$

3. Второй прямоугольник выше первого (см. рис. 14): $y_{min2} > y_{max1}$

4. Второй прямоугольник ниже первого: $y_{max2} < y_{min1}$

Осталось только применить логическое сложение (операция *or*) к рассмотренным четырём логическим выражениям. Если в итоге получим *true*, значит, прямоугольники не пересекаются.

Теперь мы готовы к написанию программы. Попробуйте сделать это сами, используя решение задачи 2 в качестве подпрограммы.

Задания для самостоятельного решения

1. Куда направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ на рис. 3?
2. На рис. 4 показано, что $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно произведению длины вектора $\vec{b}$ на проекцию вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$. А можно ли утверждать, что $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно произведению длины вектора $\vec{a}$ на проекцию вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$? Докажите это.
3. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Убедитесь в этом, рассмотрев ненулевые неколлинеарные (непараллельные) векторы $\vec{a} \neq \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$.
4. Напишите программу решения задачи 2 из текста этого занятия.
5. Напишите программу решения задачи 3 из текста занятия. Если многократные попытки решить эту задачу не привели вас к успеху, скачайте моё решение на FreePascal <http://dolschool5.narod.ru/dist/segments.zip>
6. Пусть выпуклый N-угольник задан координатами своих вершин в порядке обхода против часовой стрелки. Определить, принадлежит ли точка М внутренней области этого многоугольника.

Формат входных данных

Файл *input.txt* содержит в первой строке натуральное число $N \leq 100$, далее идут N строк, содержащие по 2 целых числа x и y — координаты вершин многоугольника. В последней строке заданы координаты точки M . Все координаты — целые числа, по модулю не превосходящие 10^4 .

Формат выходных данных

В файл *output.txt* выведите YES, если точка M принадлежит внутренней области многоугольника. В противном случае выведите NO.

Указание. Многоугольник называется выпуклым, если он располагается по одну сторону относительно прямой, содержащей любую сторону многоугольника². Таким образом, при заданном в условии задачи направлении обхода любая внутренняя точка многоугольника лежит слева от направления движения на протяжении всего обхода.

7. На плоскости своими координатами заданы точки A , B и C . Определить, лежит ли точка C между точками A и B на одной прямой с ними, т.е. является ли она внутренней точкой отрезка AB . Координаты всех точек — целые числа, по модулю не превосходящие 10^4 .

Указание. Воспользуйтесь скалярным произведением векторов. Постарайтесь избежать вычислений с вещественными числами.

Литература

1. Андреева Е.В., Егоров Ю.Е. Вычислительная геометрия на плоскости. //Информатика №39–44/2002.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: Учебник для университетов. — 4-е изд., доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
3. Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика: Учебное руководство: Пер. с англ./Под ред. А.И. Шальникова и А.С. Ахматова. — 3-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1983. — (Берклевский курс физики).
4. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: Построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2010.
5. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 3 — М.: «Советская Энциклопедия», 1982.

² См. [5] в списке литературы